TD n°8: Espaces de fonctions holomorphes

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-4-5-6-7-8. Les exercices marqués d'un [1] sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Séries de Dirichlet et transformée de Mellin.

Exercice 1. Les séries de Dirichlet comme transformées de Mellin.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes, on suppose que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$$

converge absolument pour $\Re(s) > \sigma_a$. On définit $A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n$.

1. Démontrer que pour tout $\sigma > \sigma_a$, il existe une constante $C_\sigma > 0$ telle que :

$$|A(x)| \leqslant C_\sigma x^{\sigma+1}.$$

   En déduire que $A(x)x^{-s-1} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pour $\Re(s) > \sigma_a$.

2. Démontrer que pour $\Re(s) > \sigma_a$, on a

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s} = s\int_0^\infty x^{-s}A(x)\frac{dx}{x}.$$

Exercice 2. Abscisse de convergence absolue.
On rappelle à toutes fins utiles le théorème de sommation par parties : si $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sont des suites de nombres complexes, alors

$$\sum_{n=1}^{N} A_n b_n = A_{N+1}B_{N+1} - A_1B_1 - \sum_{n=1}^{N} a_n B_{n+1}$$

où $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Dans tout l'exercice, on considère une série de Dirichlet formelle $f(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$. On note $f'(s) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{\log(n)a_n}{n^s}$ sa dérivée formelle.

1. On note

$$\sigma_a(f) = \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n\geqslant 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \infty\right\}.$$

   Démontrer que f définit une fonction holomorphe sur le demi-plan ouvert $\Re(s) > \sigma_a(f)$.

2. Soient f, g des séries de Dirichlet formelles. Démontrer les inégalités $\sigma_a(f+g) \leqslant \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$, $\sigma_a(fg) \leqslant \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$. Démontrer également que $\sigma_a(f') = \sigma_a(f)$ et que la série définie par f' sur $\Re(s) > \sigma_a(f)$ est bien la dérivée de f.

3. On pose $C_n = \sum_{k=1}^n |a_n|$. Démontrer que

$$\sigma_a(f) = \limsup \frac{\log(C_n)}{\log(n)}.$$

4. Calculer $\sigma_a(f)$ pour $f(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$. Démontrer que f converge localement uniformément sur le demi-plan $\Re(s) > 0$.

---

[1] Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

Exercice 3. Autour de la transformée de Mellin
On définit, pour f fonction mesurable de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge absolument.

1. Démontrer que si $\mathcal{M}f(s)$ converge absolument, alors $\mathcal{M}f(s')$ converge également pour $\Re(s) = \Re(s')$. En déduire que $\mathcal{M}f$ définit une fonction sur une bande (potentiellement vide) $a < \Re(s) < b$.

2. Démontrer $\mathcal{M}f$ est holomorphe sur cette bande bande.

3. Démontrer que pour $a < \sigma < b$, $t \mapsto \mathcal{M}f(\sigma + it)$ est la transformée de Fourier de $y \mapsto e^{-\sigma y} f(e^{-y})$

4. En déduire la formule d'inversion de Mellin : si $\mathcal{M}f$ converge sur $a < \Re(s) < b$, qu'on a $a < \sigma < b$ et que $t \mapsto \mathcal{M}f(\sigma + it)$ est L^1, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma + i\mathbb{R}} x^{-s} \mathcal{M}f(s) ds.$$

   On suppose à présent que f est C^∞ à décroissance rapide et continue en l'infini, c'est-à-dire que $x^n f(x)$ est bornée pour tout n. On suppose que les dérivées de f vérifient la même condition, et que f et ses dérivées sont bornées au voisinage de 0.

5. (a) Démontrer que $\mathcal{M}f$ est holomorphe sur la bande infinie $\Re(s) > 0$.
   (b) Démontrer que pour $\Re(s) > 0$, on a $\frac{1}{s}\mathcal{M}(f')(s+1) = \mathcal{M}f(s)$.
   (c) En déduire que $\mathcal{M}f$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ à pôles simples aux entiers négatifs, avec un résidu de $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ en $-n$.

Elements d'analyse fonctionnelle.

Exercice 4. Une application du théorème de Montel.
Soient $a < b$ deux réels et $U = \{z \in \mathbb{C}, a < \Re(z) < b, \Im(z) > 0\}$. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ bornée. Supposons qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c + iy) \to 0$ quand $y \to \infty$. Montrer que $f(x + iy) \to 0$ quand $y \to \infty$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exercice 5. Limite simple de fonctions holomorphes.

1. Soient U un ouvert non vide et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge simplement vers une fonction f. Montrer qu'il existe un ouvert non vide V dont l'adhérence est contenue dans U et un réel $M > 0$ tels que :

$$\forall z \in V, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z)| \leqslant M.$$

2. En déduire qu'une limite simple de fonctions de $\mathcal{O}(U)$ est holomorphe sur un ouvert dense dans U.

Exercice 6. Une suite bien connue.
Pour $n > 0$, on définit $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Démontrer à l'aide du théorème de Montel que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une limite à déterminer.

Exercice 7. Une partie compacte de $\mathcal{O}(U)$.

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $a \in U$. Notons:

$$\mathcal{F}_a = \{f \in \mathcal{O}(U) : \ f \text{ injective}, \ f(a) = 0, \ \sup_{z \in U} |f(z)| \leq 1\}.$$

   Démontrer que $\mathcal{F}_a$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{O}(U)$, dont l'adhérence contient 0.

2. Démontrer à l'aide du théorème de Rouché qu'une limite localement uniforme de fonctions holomorphes injectives sur un ouvert connexe est injective ou constante.

3. En déduire que $\mathcal{F}_a \cup \{0\}$ est compacte.

Exercice 8. L'algèbre du disque et sa boule unité.
On note $A(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions continues sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ qui sont holomorphes sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$.

1. Démontrer que $A(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre fermée de l'algèbre $C(\overline{\mathbb{D}})$ des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ avec la norme sup $|.|_\infty$.

2. Vérifier que $A(\mathbb{D})$ n'est pas stable par dérivation.

3. Démontrer que l'algèbre $\mathbb{C}[z]$ des polynômes est dense dans $A(\mathbb{D})$.
   On introduit, pour $|a| < 1$, le facteur de Blaschke
   $$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

4. Démontrer que $|z| = 1 \implies |\varphi_a(z)| = 1$ et en déduire que φ_a envoie $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$.

5. Soit $f \in A(\mathbb{D})$ unimodulaire, c'est-à-dire que $|z| = 1 \implies |f(z)| = 1$. Démontrer que f est un produit fini de φ_a et d'un nombre complexe de module 1.
   Indication : on pourra démontrer qu'une $g \in A(\mathbb{D})$ unimodulaire sans zéros est constante.

6. Soit $f \in \mathbb{C}[z]$ de degré d vérifiant $|f|_\infty < 1$, on note $f^*(z) = z^d\overline{f(1/\overline{z})}$. Démontrer que
   $$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}z^d + f(z)}{1 - f^*(z)e^{it}}dt$$

7. En déduire que l'enveloppe convexe fermée des unimodulaires est la boule unité fermée.

Exercice 9. Le dual de l'algèbre du disque

1. Démontrer que l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ s'identifie à une sous-algèbre fermée de l'algèbre $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur le cercle unité $\mathbb{T}$.
   On admet (ou rappelle) le théorème de Riesz-Markov-Kakutani : toute fonctionnelle linéaire continue sur $C(X, \mathbb{C})$ est donné par l'intégration contre une mesure borélienne régulière à valeurs complexes.

2. Démontrer que toute fonctionnelle linéaire continue sur $A(\mathbb{D})$ s'écrit
   $$f \mapsto \int_{\mathbb{T}} f(z)d\mu(z)$$
   pour μ mesure régulière complexe. μ est-elle unique ?

3. Soit $K \subseteq \mathbb{D}$ un compact, ν une mesure de Radon complexe sur ce compact, $m \geqslant 0$ un entier.
   (a) Démontrer que $f \mapsto \int_K f^{(m)}(z)d\nu(z)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $A(\mathbb{D})$.
   (b) Expliciter une mesure μ sur $\mathbb{T}$ correspondant à cette fonctionnelle.

Exercice 10. Propriété universelle de l'algèbre du disque
Un $\mathbb{C}$-espace de Banach $(B, |.|_B)$ est appelé $\mathbb{C}$-algèbre de Banach, ou juste algèbre de Banach, si B est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire (mais pas nécessairement commutative) pour laquelle la norme est sous-multiplicative, c'est-à-dire que $|bb'|_B \leqslant |b|_B|b'|_B$.

1. Démontrer que la multiplication est continue de B^2 dans B.

2. Vérifier que $A(\mathbb{D})$ est une algèbre de Banach, ainsi que $C(X, \mathbb{C})$ pour un compact X.
   On dit qu'un élément $b \in B$ est polynomialement borné s'il existe $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$, on a
   $$|P(b)| \leqslant C|P|_\infty.$$
   On note $\mathrm{PB}(B)$ l'ensemble des éléments polynomialement bornés de B.

3. Démontrer que l'application $z \mapsto \varphi(z)$ induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(A(\mathbb{D}), B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PB}(B)$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}$ désigne les morphismes continus de $\mathbb{C}$-algèbres. Démontrer également que cette bijection est continue pour la topologie de la convergence simple à gauche et la topologie de sous-espace de B à droite.

4. Dans le cas où B est une sous-algèbre fermée d'un $C(X, \mathbb{C})$ pour X compact, expliciter $\mathrm{PB}(B)$ et démontrer que l'application ci-dessus est un homéomorphisme.

5. En considérant l'algèbre $B = \mathbb{C}[z]/(z^2)$ avec la norme $|a + b[z]| = |a| + |b|$, montrer que l'application réciproque $\mathrm{PB}(B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(A(\mathbb{D}), B)$ n'est pas toujours continue.